符号理論への不変式論の応用 (不変式論とその周辺)

AUTHOR(S):

吉田, 知行

CITATION:

吉田, 知行. 符号理論への不変式論の応用 (不変式論とその周辺). 数理解析研究所講究録 1981, 444: 180-197

ISSUE DATE:

1981-12

URL:

http://hdl.handle.net/2433/102874

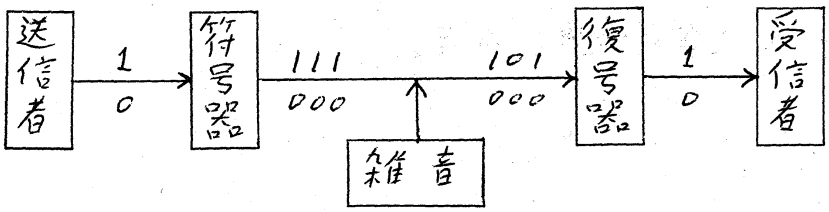
数理解析研究所講究録
444巻 1981年 180-197

符号理論への不変式論の応用

北大 理学部 吉田知行

§1. 符号(コード)

符号理論は Shannon に始まるといわれている(1948).



今送信者が"0"と"1"から成る情報を受信者に向けて送るとする、しかしこのままの形で送ると雑音のため0と1が入れ換わって、相手方に正しく受け取られないかもしれない。そこで符号器(encoder)によって、"0"を"000"に、"1"を"111"に変換して送信することにする。こうすれば例えば"101"が送られてきた場合は、多数決によって"1"と解釈すればよい。即ち1ビットの情報を送るのに000と111を用い、他の6個のベクトルはエラーを訂正するのに用いるのである。こうすればエラーの確率はずっと小さくなる。この例のコー

ド $\{000, 111\}$ は，実際は3倍もの時間がかかるため，良いコードとは言えない．情報理論的に良いコードを求めるのが符号理論の最大の目標である．最近では通信ばかりでなく，計算機のメモリシステム等でも誤まり訂正符号が用いられている．

$\mathbb{F}_q$ を q 元体，$\mathbb{F}_q^n$ を $\mathbb{F}_q$ 上の n 次元ベクトル空間とする．各 $x=(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{F}_q^n$ と $y=(y_1,\cdots,y_n)\in\mathbb{F}_q^n$ に対し，

$$\partial(x,y) := \#\{i \mid 1\le i\le n,\ x_i\neq y_i\}$$

とおくと，$(\mathbb{F}_q^n, \partial)$ は距離空間になる．∂ を Hamming 距離という．

$$w(x) := \partial(0,x) = \#\{i \mid x_i\neq 0\}$$

を x の重さ (weight) と言う．

定義．($\mathbb{F}_q$ 上の線型) コードとは，$\mathbb{F}_q^n$ の部分空間のことである．n を C の長さ，$k=\dim C$ をコードの次元という．

$$d := d(C) := \min\{w(x) \mid 0\neq x\in C\}$$

を C の最小距離という．このような C を $[n,k,d]$-コードという．このコードは $[(d-1)/2]$ 個のエラーを訂正できる．

定義．C を $\mathbb{F}_q$ 上の $[n,k,d]$-コードとする．$A_i := \#\{u\in C \mid w(u)=i\}$ とおく．このとき，多項式

$$W_C(x,y) := \sum_{i=0}^{n} A_i x^{n-i}y^i = \sum_{u\in C} x^{n-w(u)}y^{w(u)}$$

を C の重み分布多項式 (weight enumerator) という．さらに

$\mathbb{F}_q$ の元を $\omega_0=0, \omega_1, \cdots, \omega_{q-1}$ とする．$u=(u_1,\cdots,u_n)\in C$ に対し，$s_i:=s_i(u):=\#\{j \mid u_j=\omega_i\}$，$\mathrm{comp}(u):=(s_0,\cdots,s_{q-1})$ とおく．さらに $t=(t_0,\cdots,t_{q-1})$ に対し，$A(t):=\#\{u\in C \mid \mathrm{comp}(u)=t\}$ とおく．このとき，q 変数多項式

$$W_C(z_0,\cdots,z_{q-1}):=\sum_t A(t) z_0^{t_0}\cdots z_{q-1}^{t_{q-1}} = \sum_{u\in C} z_0^{s_0(u)}\cdots z_{q-1}^{s_{q-1}(u)}$$

を<u>完備重さ分布関数</u>という．これは n 次の斉次多項式である．

<u>定義</u>．C を $\mathbb{F}_q$ 上の $[n,k,d]$-コードとする．C の k 個の基底を $x_1=(x_{11},\cdots,x_{1n}),\cdots,x_k=(x_{k1},\cdots,x_{kn})$ とする．$k\times n$ 行列 $G:=(x_{ij})$ を C の<u>生成行列</u>という．$(n-k)\times n$ 行列 H で，階数 $n-k$ で $GH^t=0$ なるものを<u>パリティ検査行列</u>（parity check matrix）という．$C=\{u\in\mathbb{F}_q^n \mid xH^t=0\}$ である．

生成行列 G として $(I_k \mid G')$ の形のものがとれ，パリティ検査行列 H として，$(-G'^t \mid I_{n-k})$ をとれる．このような G と H を選んだ時，送信者は $(u_1,\cdots,u_k)$ を，$(x_1,\cdots,x_n)=(u_1,\cdots,u_k)G$（ここで，$x_1=u_1,\cdots,x_k=u_k$）の形に符号化して送信する．$(x_1',\cdots,x_n')$ を受信した受信者は (i) $(x_1',\cdots,x_n')H^t=0$ ならエラーは起こらず（このとき $(x_1',\cdots)\in C$），$(x_1',\cdots,x_k')$ がもとのデータだと判断する．または (ii) $(x_1',\cdots,x_n')H^t\neq 0$ ならエラーが起こっているので，訂正可能な場合は訂正してもとのデータを改復する．

コードに関する工学的な要求として次があげられる.

(1) n が小 (符号化が速い),

(2) k が大 (多くのデータを送れる),

(3) d が大 (誤り訂正能力が大きい).

これらの条件は数学的に見ても興味深い.

§2. コードの例.

(1) $\{(a,\cdots,a) \mid a \in \mathbb{F}_q\} \subseteq \mathbb{F}_q^n$. これは $\mathbb{F}_q$ 上の $[n,1,n]$-コードで,「くり返しによるコード」とか「多数決によるコード」と呼ばれる. 重み分布関数は,

$$W_C(z_0,\cdots,z_{q-1}) = \sum_{i=0}^{q-1} z_i^n$$

$$W_C(x,y) = x^n + (q-1)y^n.$$

(2) Hamming コード H_n, $n = 2^r-1$, $k = n-r$. パリティ検査行列 H は, 長さ r の $(0,1)$-列ベクトル $(\neq 0)$ 2^r-1 個からなる $r \times n$-行列である. $r=3$ なら

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

H_n は $[2^r-1, n-r, 3]$-コードである.

(3) 拡大コード. C を $\mathbb{F}_2$ 上の $[n,k,d]$-コードとする. $\exists c \in C$ s.t. $w(c)$ が奇数, と仮定する. C のパリティ検査行列を H とする. 次の $(n-k+1)\times(n+1)$ 行列をパリティ検査行列と

するコード $\hat{C}$ をCの拡大という：

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ & H & & \begin{matrix}0\\ \vdots \\ 0\end{matrix} \end{pmatrix}.$$

例えばHammingコード H_7 から拡大Hammingコード H_8 が得られるが，これは $[8,4,4]$-コードである．一般に $[n,k,d]$-コードの拡大は $[n+1,k,d+1]$-コードであり，

$$\hat{C} = \{(x_1,\cdots,x_{n+1}) \in \mathbb{F}_2^{n+1} \mid (x_1,\cdots,x_n) \in C,\ x_1+\cdots+x_{n+1}=0\}.$$

(4) Binary Golay codes これは $\mathbb{F}_2$ 上の $[23,12,7]$-コード G_{23} である．その拡大コード G_{24} もGolayコードという．G_{24} の生成行列は次である．

$$G = \begin{array}{c} \infty\ 0\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ \infty'\ 0'\ 1'\ 2'\ 3'\ 4'\ 5'\ 6'\ 7'\ 8'\ 9'\ 10' \\ \left(\begin{array}{cccccccccccccccccccccccc} 1&1&&&&&&&&&&&1&1&&1&1&1&&&&&1&\\ 1&&1&&&&&&&&&&1&&1&1&&1&1&&&&1&\\ 1&&&1&&&&&&&&&1&1&&1&1&&1&1&&&1&\\ 1&&&&1&&&&&&&&1&1&&1&1&&1&1&&1&&\\ 1&&&&&1&&&&&&&1&1&&1&1&&1&1&1&&&\\ 1&&&&&&1&&&&&&1&1&&1&1&&1&1&1&1&&\\ 1&&&&&&&1&&&&&1&&1&1&1&&1&1&1&1&1&\\ 1&&&&&&&&1&&&&1&1&1&&1&1&1&1&&&1&\\ 1&&&&&&&&&1&&&1&1&1&1&&1&1&1&&1&&\\ 1&&&&&&&&&&1&&1&1&1&1&1&&1&1&&&1&\\ 1&&&&&&&&&&&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&\\ \hline 1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1 \end{array}\right) \end{array}$$

(5) Ternary Golay codes G_{11}, G_{12}. これらは $\mathbb{F}_3$ 上の $[12,6,5]$-コードと $[12,6,6]$-コードである

重み分布関数について．

Hammingコード H_n $(n=2^r-1)$ の重み分布関数

$$W_C(x,y) = \frac{1}{n+1}\{(x+y)^n + n(x+y)^{(n-1)/2}(x-y)^{(n+1)/2}\}.$$

拡大 Hamming コード H_8 について，

$$W_C(x,y) = x^8 + 14x^4y^4 + y^8.$$

Golay コード G_{23}, G_{24} について，

$$W_{G_{23}}(x,y) = x^{23} + 253x^{16}y^7 + 506x^{15}y^8 + 1288x^{12}y^{11} + 1288x^{11}y^{12} + 506x^8y^{15} + 253x^7y^{16} + y^{23}.$$

$$W_{G_{24}}(x,y) = x^{24} + 759x^{16}y^8 + 2576x^{12}y^{12} + 759x^8y^{16} + y^{24}.$$

Golay コード G_{12} について（完備）重み分布関数

$$V_{G_{12}}(x,y,z) = x^{12} + y^{12} + z^{12} + 22(x^6y^6 + x^6z^6 + y^6z^6) + 220(x^6y^3z^3 + x^3y^6z^3 + x^3y^3z^6)$$

$$W_{G_{12}}(x,y) = x^{12} + 3y^{12} + 264x^6y^6 + 440x^3y^9.$$

<u>自己同型群について</u>．C を $[n,k,d]$-コードとする．対称群 S_n の元 σ は自然に $\mathbb{F}_2^n$ に作用している．σ が $C \subseteq \mathbb{F}_2^n$ を動かさない時，σ を C の自己同型という．C の自己同型全体のなす群を $Aut(C)$ と書く．

$$Aut(H_7) \cong GL(3,\mathbb{F}_2)$$

$$Aut(G_{23}) \cong M_{23},\ Aut(G_{24}) \cong M_{24},$$

$$Aut(G_{11}) \cong M_{11},\ Aut(G_{12}) \cong M_{12}.$$

ここで M_n は Mathieu 群．

なお重み分布関数を実際に求めるのは大変である．自己双対コード（G_{24}, G_{12} など）については次節の方法が有力である．

§3. Macwilliams の定理.

定義 C を $[n, k, d]$-コードとする.

$$C^{\perp} := \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{F}_2^n \mid \sum_i x_i y_i = 0 \text{ for } {}^\forall (y_1, \cdots) \in C\}.$$

このとき $C^{\perp}$ を C の双対コードという. これは $[n, n-k, d']$-コードである(ある d' に対して). $C = C^{\perp}$ のとき C を自己双対コードという. 自己双対コードについて $k = n/2$.

拡大 Hamming コード H_r, Golay コード G_{12}, G_{24} は自己双対コードである. 変わったものとしては有限射影平面から得られるコードがある. $(P, \mathcal{L})$ を位数 q の有限射影平面とする. A をその結合行列とすると, A は $\mathbb{F}_2$ 上の $\nu \times \nu$ 行列とみなせる ($\nu = q^2 + q + 1$ = 点の個数). C を A の行ベクトルで生成された $\mathbb{F}_2^{\nu}$ の部分空間とする. 組合せ論の大問題として, q が素数冪であることが予想されており, 実際 $q \neq 6$ は証明されている. $q = 10$ が次の問題となるが, この場合は C の拡大コード $\hat{C}$ が $[112, 56, 12]$-自己双対コードになる (E.F. Assmus, J.G. Thompson). しかしその重み分布関数は完全には決まっていない.

さて双対コードの(完備)重み分布関数を元のコードの重み分布関数から計算するのが Macwilliams の定理である.

定理 (Macwilliams). C が $\mathbb{F}_q$ 上の $[n, k, d]$-コードなら,

$$W_{C^{\perp}}(x, y) = \frac{1}{q^k} W_C(x + (q-1)y, x - y).$$

$q=2$ の場合の証明を述べておく.

補題. $F:=\mathbb{F}_2$, A: アーベル群, $f: F^n \longrightarrow A$ を写像, C を F 上の $[n,k,d]$-コードとする. f の Hadamard 変換を次で定義する:

$$\hat{f}(u) := \sum_{v\in F^n} (-1)^{u\cdot v} f(v) \qquad \forall u \in F^n.$$

このとき Poisson の和公式が成立する:

$$\frac{1}{2^k} \sum_{u\in C} \hat{f}(u) = \sum_{u\in C^\perp} f(u).$$

(証明) $\displaystyle\sum_{u\in C} \hat{f}(u) = \sum_{u\in C} \sum_{v\in F^n} (-1)^{u\cdot v} f(v)$

$$= \sum_{v\in F^n} \left(\sum_{u\in C} (-1)^{u\cdot v} \right) f(v).$$

各 $v\in F^n$ に対し, $\chi_v : C \longrightarrow \{\pm 1\} ; u \longmapsto (-1)^{u\cdot v}$ は C の指標だから, 直交関係により

$$\chi_v = 1_C \Rightarrow \sum_{u\in C} (-1)^{u\cdot v} = |C| = 2^k$$

$$\chi_v \neq 1_C \Rightarrow \sum_{u\in C} (-1)^{u\cdot v} = 0.$$

ところが, $\chi_v = 1_C \Leftrightarrow (-1)^{u\cdot v} = \quad \forall u\in C \Leftrightarrow u\cdot v = 0 \quad \forall u \in C$

$$\Leftrightarrow v \in C^\perp$$

$$\therefore \sum_{u\in C} \hat{f}(u) = \sum_{v\in C^\perp} 2^k f(v) = 2^k \sum_{v\in C^\perp} f(v). \quad \text{QED.}$$

(定理の証明) $f(u) := x^{n-w(u)} y^{w(u)}$ とおくと,

$$\sum_{v\in C^\perp} f(v) = W_{C^\perp}(x,y).$$

一方ベクトルを成分ごとに計算すると,

$$\hat{f}(u) = \sum_{v\in F^n} (-1)^{u\cdot v} f(v) = \sum_{v\in F^n} (-1)^{u\cdot v} x^{n-w(v)} y^{w(v)}$$

$$= \sum_{(v_1,\cdots)\in F^n} (-1)^{u_1v_1+\cdots+u_nv_n} \prod_{i=1}^{n} x^{1-v_i} y^{v_i}$$

$$= \sum_{v_1=0}^{1} \cdots \sum_{v_n=0}^{1} \prod_{i=1}^{n} (-1)^{u_iv_i} x^{1-v_i} y^{v_i}$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \sum_{v_i=0}^{1} (-1)^{u_iv_i} x^{1-v_i} y^{v_i}$$

$$= (x+y)^{n-w(u)} (x-y)^{w(u)}$$

補題より定理が得られる． QED.

系．C が $[n, n/2, d]$-自己双対コードなら，

$$W_C(x,y) = W_C\left(\frac{x+(q-1)y}{\sqrt{q}}, \frac{x-y}{\sqrt{q}}\right).$$

さて不変式論の簡単な結果を使うと自己双対コードの重み分布関数がきわめて特殊な形をしていることがわかる．

定理（Gleason）．C を $\mathbb{F}_q$ 上の自己双対 $[n, k, d]$ コードとすると，重み分布関数 $W_C(x,y)$ は，$g := x^2+(q-1)y^2$ と $h := xy-y^2$ の多項式として表わせる：

$$W_C(x,y) \in \mathbb{C}[g,h].$$

（証明） $A := \frac{1}{\sqrt{q}}\begin{pmatrix} 1 & q-1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B := \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. $(A^2 = I)$

とすれば，(1) $W_C(x,y)$ は A によって不変（Macwilliams），(2) $W_C(x,y)$ は B によって不変（W_C が $n=2k$ 次の斉次多項式だから）． $R = \mathbb{C}[x,y] = \bigoplus_{m=0}^{\infty} R_m$，$R_m$ は m 次の斉次多項式全体，$G := \langle A, B\rangle \subseteq GL(2,\mathbb{C})$ とすれば，$W_C(x,y) \in R^G$．

ここで Molien (Poincaré) 級数を計算すると,

$$P(R^G, t) := \sum_{m=0}^{\infty} (\dim R_m^G) t^m$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{\sigma \in G} \frac{1}{\det(I - t\sigma)} \quad (\text{Molien の定理})$$

$$= \frac{1}{(1-t^2)^2} = (1 + t^2 + t^4 + \cdots)(1 + t^2 + t^4 + \cdots)$$

不変式論より $R^G = \mathbb{C}[g, h]$, $g = x^2 + (y-1)^2$, $h = xy - y^2$ となるから定理が示された. Q.E.D.

以上のことは完備重み分布関数についてもいえる.

定理. C を $\mathbb{F}_q$ 上の $[n, k, d]$-コードとする. $\mathbb{F}_q$ の元を $\{\omega_0 = 0, \omega_1, \cdots, \omega_{q-1}\}$ と並べておく. $\chi : \mathbb{F}_q \longrightarrow \mathbb{C}$ を加法群 $\mathbb{F}_q^+$ の自明でない指標とする. このとき完備重み分布関数について次が成立する.

$$V_{C^\perp}(z_0, \cdots, z_{q-1}) = \frac{1}{q^k} V_C\left(\sum_{i=0}^{q-1} \chi(\omega_0 \omega_i) z_i, \cdots, \sum_{i=0}^{q-1} \chi(\omega_{q-1} \omega_i) z_i\right).$$

この定理の応用として, Gleason の定理を $\mathbb{F}_3$ に拡張した Sloane の定理がある.

定理. $V(x, y, z)$ を, $\mathbb{1} = (1, \cdots, 1)$ を含む $\mathbb{F}_3$ 上の自己双対 $[n, n/2, d]$-コードの完備重み分布関数とすると,

$$V(x, y, z) \in \mathbb{C}[\alpha_{12}, \beta_6^2, \delta_{36}] \oplus \beta_6 \gamma_{18} \mathbb{C}[\alpha_{12}, \beta_6^2, \delta_{36}].$$

ここで, $\alpha_{12} = a_2(a_3^3 + 8p^3)$, $\beta_6 = a_2^{12} - 12b$, $\gamma_{18} = a_6^6 - 20a_3^3 p^3 - 8p^6$, $\delta_{36} = p^3(a_3^3 - p^3)^3$, さらに $a_i = x^i + y^i + z^i$,

$P = 3xyz$, $b = x^3y^3 + x^3z^3 + y^3z^3$ である. $(\gamma_{18}^2 = \varphi_{12}^3 - 64\delta_{36})$.

(証明の概略) まず $1 \in C = C^\perp$ より $V \in \mathbb{C}[x^3, y^3, z^3]$ となる. よって $V(x,y,z)$ は $\mathrm{diag}(\omega^i, \omega^j, \omega^k)$ によって不変. ここで $\omega = e^{2\pi\sqrt{-1}/3}$. 次に $u \in C$ なら $-u \in C$, $\mathbb{1}+u \in C$ 等によって $V(x,y,z)$ は任意の3次の置換行列によって不変. 最後に, 定理より $V(x,y,z)$ は

$$M = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega \end{pmatrix}$$

によって不変. したがってこれら3種類の行列の生成する群 G によって, $V(x,y,z)$ は不変である. なお $|G| = 2^5 \cdot 3^4$. 第2段として, $G \subseteq GL(3,\mathbb{C})$ の Molien 級数を計算すると,

$$P(R^G, t) = \frac{1+t^{24}}{(1-t^{12})^2(1-t^{36})}$$

あとは不変式論の知識を使って, 不変式環の多項式基底を求める.

§4. 不変式論から.

符号理論で使われる不変式論の結果は古典的なものであるが, 一応よく使われる結果を述べておこう.

G を $GL(n,\mathbb{C})$ の有限部分群, $R = \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]$ とすると, G は R に(多元環準同型として)作用する:

$$f^\sigma(X_1,\cdots,X_n) := f\Big(\sum_i a_{1i}X_i,\ \cdots,\ \sum_i a_{ni}X_i\Big),$$

$$\sigma = (a_{ij}) \in G \subseteq GL(n,\mathbb{C}).$$

Gによる不変式環を $R^G = \{f \in R \mid f^\sigma = f\ \forall \sigma \in G\}$ とし，d次の斉次多項式のなすRの部分加群をR_d，$R_d^G = R_d \cap R^G$ とすれば，$R = \bigoplus_{d=0}^{\infty} R_d$，$R^G = \bigoplus_{d=0}^{\infty} R_d^G$ となる．Molien (Poincare) 級数を次で定義する：

$$P_G(t) := \sum_{n=0}^{\infty} (\dim R_n^G)\, t^n \in \mathbb{C}[[t]].$$

定理 (Molien, 1897)

$$P_G(t) = \frac{1}{|G|} \sum_{\sigma \in G} \frac{1}{\det(I - t\sigma)}$$

定理 (Hochster-Eagon, 1971). R^G は Cohen-Macaulay 環．したがって斉次多項式 $\theta_1,\cdots,\theta_m, \eta_1,\cdots,\eta_t$ が存在して，

(i) $\theta_1,\cdots,\theta_m$ は代数的に独立，

(ii) $R^G = \bigoplus_{i=1}^{t} \mathbb{C}[\theta_1,\cdots,\theta_m]\eta_i$．

(注意) 上の定理で，$d_i = \deg \theta_i$，$e_i = \deg \eta_i$ のとき，

$$P_G(t) = \Big(\sum_{i=1}^{t} t^{e_i}\Big) \Big/ \prod_{j=1}^{m} (1 - t^{d_j}).$$

定理．$R^G = \mathbb{C}[\theta_1,\cdots,\theta_m]$ で $\theta_1,\cdots,\theta_m$ が代数的に独立斉次式 $\Leftrightarrow$ G が ユニタリ reflection で生成される．

このとき $d_i = \deg \theta_i$ なら，$|G| = d_1 \cdots d_m$，$\sum (d_i - 1) = \#\{u.\ \mathrm{refl.\ in}\ G\}$.

§5. 応用.

以下Cは $\mathbb{F}_q$ 上の長さ n の自己双対コードとし，次の問題を考える.

問題. n と q を与えたとき，$\mathbb{F}_q$ 上の長さ n の自己双対コードは最大いくつまでのエラーを訂正（または検出）できるか？ 即ち次の量を求めよ.

$$d^* := \max\left\{ d(C) \;\middle|\; \begin{array}{l} C \text{は} \mathbb{F}_q \text{上の長さ} n \text{の} \\ \text{自己双対コード} \end{array} \right\}.$$

一般に $d = d(C)$ のとき，Cの重み分布関数について，

$$W_C(x,y) = x^n + A_d x^{n-d} y^d + A_{d+1} x^{n-d-1} y^{d+1} + \cdots.$$

$$A_1 = \cdots = A_{d-1} = 0, \quad A_d \neq 0, \quad A_i \geq 0 \ (\forall i).$$

定理 (Gleason, Pierce, Turyn). $e > 1$ を自然数とする. 任意の $u \in C$ に対し $w(u)$ が e の倍数で，Cは nontrivial と仮定する. このときCは次の4つの型のどれかになる.

Type	q	e	$d(C)$
I^*	2	2	$\leq 2[n/8]+2$
II	2	4	$\leq 4[n/24]+4$
III	3	3	$\leq 3[n/12]+3$
IV	4	2	$\leq 2[n/6]+2$.

*) Type II に属さないもの. [ ] は Gauss 記号

以下 Type II のコード C について $\alpha := \alpha(C) \leq 4[n/24]+4$ を示そう，$w(x) \equiv 0 \ (4)$ $(\forall x \in C)$ だから，

$$i \not\equiv 0 \ (4) \Rightarrow A_i := \#\{u \in C \mid w(u) = i\} = 0.$$

$$\therefore W_C(x,y) = \sum_{i=0}^{[n/4]} A_{4i} x^{n-4i} y^{4i}.$$

$$\therefore W_C(x,y) = W_C(x, \sqrt{-1}\, y).$$

したがって $W_C(x,y)$ は $\begin{pmatrix} 1 & \\ & \sqrt{-1} \end{pmatrix}$ で不変．Macwilliams の定理によって，$W_C(x,y)$ は

$$G = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{-1} \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq GL(2, \mathbb{C})$$

で不変となる．$|G| = 64 \times 3$ である．Molien 級数は

$$P_G(t) = \frac{1}{(1-t^4)(1-t^8)}.$$

不変式論により，$W_C(x,y) \in R^G = \mathbb{C}[\theta_8, \varphi_{24}]$，$\deg \theta_8 = 8$，$\deg \varphi_{24} = 24$ となる．ここで

$$\theta_8(x,y) := W_{H_8}(x,y) = x^8 + 14x^4y^4 + y^8,$$

$$\varphi'_{24}(x,y) := W_{G_{24}}(x,y) = x^{24} + 759x^{16}y^8 + 2576x^{12}y^{12} + 759x^8y^{16} + y^{24},$$

$$\varphi_{24}(x,y) := \frac{\theta_8^3 - \varphi'_{24}}{42} = x^4y^4(x^4 - y^4)^4.$$

θ_8 と φ_{24} は代数的に独立である．以上により次が示された．

<u>定理</u>．C が Type II なら $W_C(x,y) \in \mathbb{C}[\theta_8, \varphi_{24}]$．

系、 $n \equiv 0 \pmod 8$.

$W^*(x,y) = \sum_{i=0}^{n} c_i \theta_8^{j-3i} \varphi_{24}^i \in \mathbb{C}[\theta_8, \varphi_{24}]$, ここで, $n = 8j = 24m + 8\nu$, $\nu = 0, 1, 2$ としたとき, $m+1$ 個の $c_0, c_2, \cdots \in \mathbb{C}$ をうまく選んで,

$$W^*(x,y) = x^n + A^*_{4m+4}\, x^{n-4m-4} y^{4m+4} + \cdots$$

の形にできる. しかも $A^*_{4m+4} > 0$. 例えば,

$$n = 24m \Rightarrow A^*_{4m+4} = \binom{n}{5}\binom{5m-2}{m-1} \Big/ \binom{4m+4}{5} > 0.$$

したがって, 重み分布関数の係数について, $A_1 = \cdots = A_{4m+3} = 0$ とはできるが, $A_1 = \cdots = A_{4m+4} = 0$ とはできない.

$$\therefore d(C) = \min_{0 \neq c \in C} w(c) \leq 4m + 4 = 4\left[n/24\right] + 4.$$

以上によって

定理、 C が Type II なら, $d(C) \leq 4\left[\frac{n}{24}\right] + 4$.

定義、上の不等式で等号が成立するとき, extremal という. (C が他の Type のときも定義できる).

定理、Type II の extremal コードは有限個しかない.

実際十分大きな n (≥ 3712) に対して $A_{4m+8} < 0$ だから.

$n = 8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, 80, 88, 104, 136$ に対しては Type II のコードの存在が知られている. $n = 8$ のときは, 拡大 Hamming コード H_8, $n = 16$ のときは $H_8 \oplus H_8$, $n = 24$ のときは拡大 Golay コード G_{24} である. $n = 72$ の場合が重要な未解決問題となっている.

§∞. あとがき.

(1) 有限群 G が可換環 R に作用しているとする. 写像

$$\bar{N}_H^G : R^H[\epsilon] \longrightarrow R^G[\epsilon] : f \longmapsto \prod_{\sigma \in H\backslash G} f^\sigma$$

$(H \leq G)$ を考える. 各 $r \in R^H$ に対し,

$$\bar{N}_H^G(r\epsilon+1) = \sum_{i=0}^{|G:H|} \mu_i(r)\epsilon^i \quad , \mu_i(r) \in R^G$$

となるから, $1+|G:H|$ 個の写像

$$\mu_i : R^H \longrightarrow R^G \qquad i = 0, 1, \cdots, |G:H|.$$

が得られた. 明らかに $\mu_0(r) = 1$ であり,

$$\mu_1 = T_H^G : R^H \longrightarrow R^G : r \longmapsto \sum_{\sigma \in H\backslash G} r^\sigma = T_H^G(r).$$

$$\mu_{|G:H|} = N_H^G : R^H \longrightarrow R^G : r \longrightarrow \prod_{\sigma \in H\backslash G} r^\sigma = N_H^G(r).$$

T_H^G は *trace* と呼ばれる加法的写像であり, N_H^G は *norm* と乗法的 *induction* と呼ばれる乗法的写像である. R が体の場合は T_H^G は全射であり, $R^H = R^G \oplus \ker T_H^G$ である. これらの写像は具体的な不変式を作るのによく使われる.

(2) §5 の問題や結果は格子や保型関数を連想させる. 実際 *Sloane* 等がこのことを指摘している. 対応するものとしては次のものがあげられる:

コード $\longleftrightarrow$ 格子, 重み分布関数 $\longleftrightarrow$ *theta* 関数,

不変式 $\longleftrightarrow$ 保形関数, $\Theta_8 \longleftrightarrow E_2$ (*Eisenstein* 級数),

$\Psi_{24} \longleftrightarrow \Delta$, $H_8 \longleftrightarrow E_8$, $G_{24} \longleftrightarrow \Lambda_{24}$ (*Leech lattice*).

この他, "24" がどちらの理論でも重要な役をはたし, §5

の問題は空間に球をできるだけ密に埋めこむ問題に対応している．C が $\mathbb{F}_2$ 上のコードなら，$L(C)=\{x\in\mathbb{R}^n \mid \sqrt{2}x \bmod 2 \in C\}$ とすることによって格子が得られる．

(3) この講演の内容は Monthly (vol 84, 1977) にのった N. J. A. Sloane の解説をもとにしたもので新らしいことは含まれていない．

参考文献

(1) F.J.Macwilliams-N.J.A.Sloane: The Theory of Error-Correcting Codes, North-Holland ,1978.

(2) J.H.van Lint: Coding Theory, LN 201, Springer, 1971.

(3) 特集「符号理論」，数理科学 1980年12月号．

[1] J.H.Conway-A.M.Odlyzko-N.J.A.Sloane: Extremal self dual lattices exist only in dimensions 1 to 8, 12, 14, 15, 23,and 24, Mathematika 25 (1978), 36-43.

[2] A.M.Gleason, Weight polynomials of self-dual codes and the Macwilliams identities, in Actes Congres Intern. de Mathematique, 3 (1970), 211-215.

[3] J.Leech-N.J.A.Sloane: Sphere packings and error-corecting codes, Canad. J. Math., 23 (1971), 718-745.

[4] F.J.Macwilliams-N.J.A.Sloane-J.G.Thompson: Good self-dual codes exist, Discrete Math., 3 (1972),153-162.

[5] F.J.Macwilliams-N.J.A.Sloane-J.G.Thompson: On the existence of a projective plane of order 10, J. Combi. Theory, 14A (1973),66-78.

[6] C.L.Mallows-V.Pless-N.J.A.Sloane: Self-dual codes over GF(3), SIAM J. Applied Math., 31(1976),649-666.

[7] V.Pless : Symmetry codes over GF(3) and new five designs, J. Combi. Theory, 12 (1972), 209-246.

[8] V.Pless-N.J.A.Sloane: On the classification and enumeration of self-dual codes, J. Combi. Theory, 18A (1975),315-335.

[9] N.J.A.Sloane : Error-correcting codes and invariant theory: New applications of a nineteenth-century technique, Amer. Math. Monthly, 84 (1977), 82- 107.

[10] N.J.A.Sloane : Codes over GF(4) and complex lattices, J. of Algebra, 52 (1978), 168-181.

[11] R.Stanley : Invariants of finite groups and their applications to combinatorics, Bull. A.M.S., 1 (1979),475-511.

[12] C.L.Mallows-A.M.Odlyzko-N.J.A.Sloane: Upper bounds for modular forms, lattices, and codes, J. of Algebra, 36 (1975), 68-76.

[13] F.J.Macwilliams-A.M.Odlyzko-N.J.A.Sloane-H.N.Ward, Self-dual codes over GF(4), J. Combi. Theory, A25 (1978),288-318.

[14] N.J.A.Sloane, Binary codes, lattices and sphere-packings, Combinatorial surveys :Proc. of the sixth British combinatorial conference, 117-164, Academic Press, 1977.